PART2　ベクトルの大きさと内積

例題

次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$

(2)　$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=2$，$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直

Point Pickup

練習

次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$

(2)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直

第 11 講　PART2 確認問題

1　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [ア] であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\cos\theta=\dfrac{[イ]}{[ウ]}$ である。

2　$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=1$ であり，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-6\vec{b}$ が垂直である。このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [エ] であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると，$\theta=$ [オカ]$^\circ$ である。

PART2　ベクトルの大きさと内積

例題

次の条件を満たす２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$

(2)　$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=2$，$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直

(1)　$|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$　より

$$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=28 \qquad 9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=28$$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$　より

$$9\times2^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times1^2=28$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-1}{2\times1}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$

(2)　$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるから

$$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0 \qquad 3|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=2$ より

$$3\times(\sqrt{2})^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2\times2^2=0$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}\times2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=135^\circ$

練習

次の条件を満たす2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$

(2) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直

(1) $|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$ より

$$|2\vec{a}+5\vec{b}|^2=19$$

$$4|\vec{a}|^2+20\vec{a}\cdot\vec{b}+25|\vec{b}|^2=19$$

$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ より

$$4\times4^2+20\vec{a}\cdot\vec{b}+25\times(\sqrt{3})^2=19$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-6}{4\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=150^\circ$

(2) $\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直であるから

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+6\vec{b})=0$$

$$|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ より

$$3^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-6\times2^2=0$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{3\times2}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=60^\circ$

第11講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：2，ウ：3

[解説]

$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$ の両辺を 2 乗すると [A]

$$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=9$$

$$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9 \quad \text{[B]}$$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ より

$$3^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times2^2=9$$

$$25-4\vec{a}\cdot\vec{b}=9$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{4}{3\times2}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

[A]　$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$ の両辺を 2 乗し，$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表す。

[B]
$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$
（s，t は実数）

[C]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

2 **[正解]** **エ**：2，**オカ**：60

[解説]

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-6\vec{b}$ が垂直であるから

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-6\vec{b})=0$$ [D]

$$|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2=0$$

[D]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，
$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=1$ より

$$4^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-6\times1^2=0$$

$$16-5\vec{a}\cdot\vec{b}-6=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{2}$$

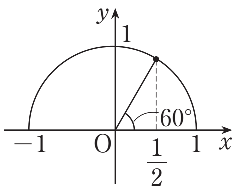
よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$ [E]

$$=\frac{2}{4\times1}=\frac{1}{2}$$

[E]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の範囲で

これを満たす θ は

$$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$$